

Eine Theorie des Kugellagermotors

2.12.2024

Tilman Schneider

Rüdesheimer Str. 58, D-53175 Bonn

E-mail: admin@relativistische-asynchronmaschine.de

Abstract. The ball bearing motor is the version of a homopolar machine, which is driven by a magnetic vector potential. This is not generated by a stator but until by a voltage and moving of the rotor. This motor combines characteristics of different types of electrical engines.

Zusammenfassung. Der Kugellagermotor ist eine Variante der Unipolarmaschine, die durch ein Vektorpotential angetrieben wird. Dieses wird nicht von einem Stator, sondern durch eine Spannung und die Bewegung des Rotors erzeugt. Dieser Motor vereint in sich die Eigenschaften verschiedener Typen von elektrischen Maschinen.

PACS numbers: 41.20.-q

urn:nbn:de:101:1-2412021827329.979492724103

1. Einleitung

Zu dieser Arbeit wurde der Verfasser durch den so genannten Kugellagermotor inspiriert, der zuerst in den Jahren 1965 (von Barker [1]) und 1967 (von Milroy [2]) beschrieben wurde. Dieser Motor wird mit elektrischem Strom betrieben, *ohne dass dazu ein Magnetfeld nötig ist*. Videos dazu gibt es im Internet (z. B. [3] und [4]). Zu seiner Funktionsweise sind auch in der Literatur verschiedene Erklärungen zu finden (z. B. [5] und [6]).

Der Autor schlägt hier eine Erklärung vor, die auf das Prinzip der Unipolarmaschine zweiter Art zurückgreift [7]. So kann geprüft werden, ob der Kugellagermotor thermisch-mechanisch durch die Kugeln der Lager angetrieben wird oder nicht.

2. Das Modell des Motors

Die im folgenden Kapitel hergeleiteten Beziehungen gelten (mit Ausnahme der Abhängigkeit der Drehzahl von der Zeit) auch für den Generatorbetrieb. Es ist jedoch instruktiv, diese Gleichungen ausgehend von der Betrachtung des Motorbetriebs herzuleiten.

2.1. Motorbetrieb

Am Kugellagermotor lässt sich folgendes beobachten:

1. Er benötigt zum Anlauf kein Magnetfeld.
2. Er läuft nicht von selbst an und muss angeworfen werden.
3. Er beschleunigt in Anlaufrichtung in einen stabilen Betriebspunkt.
4. Er kann in beiden Drehrichtungen betrieben werden.
5. Er läuft sowohl mit Gleich- als auch mit Wechselstrom.

Beobachtung 1 legt die Vermutung nahe, dass der Motor mit Hilfe eines selbsterregten Vektorpotentials arbeitet. Beobachtung 2 deutet darauf hin, dass das Feld erst durch eine Bewegung hervorgerufen und dann durch Beschleunigung (Beobachtung 3) verstärkt wird. Wegen Beobachtung 5 ähnelt der Motor einer Reihenschlussmaschine, die als Universalmotor betrieben wird.

Aufgrund dieser Beobachtungen lässt sich ein physikalisches Modell aufstellen, welches aus vier Gleichungen besteht:

$$U = U_g + IR_i, \quad (\text{Maschengleichung}), \quad (2.1a)$$

$$U_g = k_{1\varphi} A_\varphi n, \quad k_{1\varphi} > 0, \quad [k_{1\varphi}] = m, \quad (1. \text{ Hauptgleichung}), \quad (2.1b)$$

$$M = \frac{k_{1\varphi}}{2\pi} A_\varphi I \quad (2. \text{ Hauptgleichung}), \quad (2.1c)$$

$$A_\varphi = k_{2\varphi} U n, \quad k_{2\varphi} > 0, \quad [k_{2\varphi}] = \frac{s^2}{m}, \quad (\text{Selbsterregung}). \quad (2.1d)$$

$k_{1\varphi}$ und $k_{2\varphi}$ sind Konstanten. Die ersten drei Gleichungen beschreiben in allgemeiner Form Gleichstrommaschinen. Dabei ist (2.1a) die Maschengleichung, (2.1b) und (2.1c) die Hauptgleichungen der Gleichstrommaschine. In ihnen wird der übliche magnetische Fluss

durch das Vektorpotential (Komponente A_φ) ersetzt. Die zusätzliche Gleichung (2.1d) ist ein Ansatz aus der Überlegung heraus, dass das Vektorpotential beim Anwerfen mit Hilfe der verfügbaren Spannung (U) durch eine Bewegung (n) erzeugt wird. Ein anderer Zugang zu diesem Ansatz wird in Anhang 5.1 erklärt.

Der Rotor besteht aus einer Welle aus Metall mit dem Radius r_0 , die mit zwei Kugellagern leicht drehbar gelagert ist. Die Lager haben einem Abstand l . Dieser Abstand bestimmt den ohmschen Widerstand R_i der Welle. An beide Kugellager wird eine Spannung U angelegt.

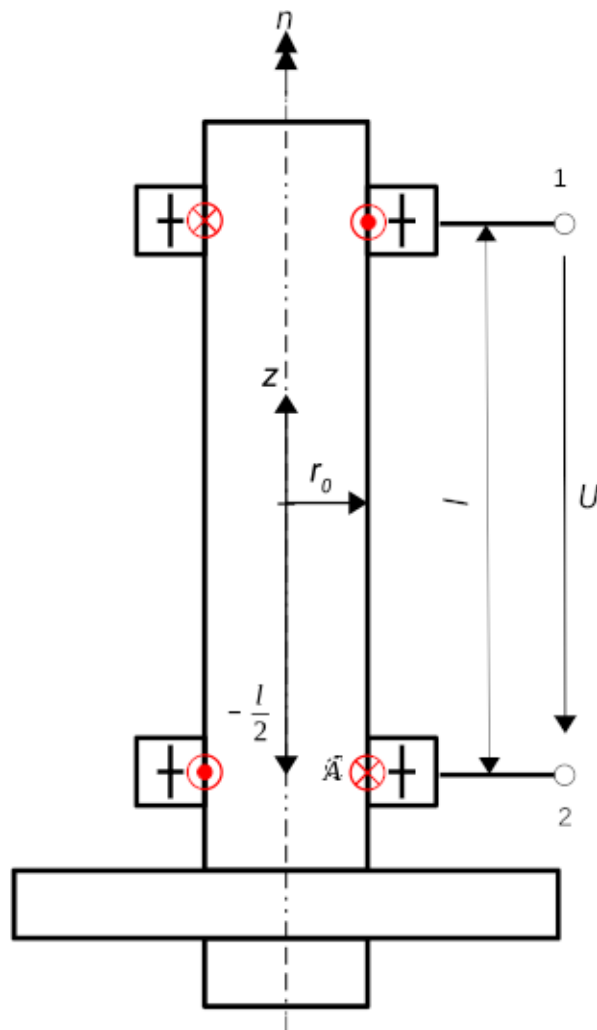


Abbildung 1. Kugellagermotor.

Beim Anwerfen wird zunächst ein kleines Vektorpotential (2.1d) und mit dessen Hilfe ein Antriebsmoment erzeugt (2.1c). Dadurch nimmt die Rotation zu und das Vektorpotential wird verstärkt (2.1d). Infolge der wachsenden Drehzahl wird zunehmend eine Gegenspannung U_g erzeugt. Einsetzen von (2.1d) in (2.1b) liefert

$$U_g = U \left(\frac{n}{n_0} \right)^2 \quad (2.2)$$

mit der Leerlaufdrehzahl

$$n_0 = \frac{1}{\sqrt{k_{1\varphi} k_{2\varphi}}}. \quad (2.3)$$

Zu Beginn fließt ein hoher Anfahrstrom

$$I_a = \frac{U}{R_i}. \quad (2.4)$$

Nach dem Anfahren wird der Strom mit zunehmender Drehzahl kleiner. Es gilt mit (2.1a) und (2.2):

$$I = I_a \left[1 - \left(\frac{n}{n_0} \right)^2 \right]. \quad (2.5)$$

Dadurch wächst das Antriebsmoment immer langsamer bis zu einem maximalen Drehmoment (Kippmoment) an, um dann schließlich mit weiter wachsender Gegenspannung wieder abzunehmen. Es ergibt sich mit den Gleichungen (2.2) und (2.5) der Zusammenhang zwischen Drehmoment und Drehzahl:

$$M = \frac{P_{\text{mech}}}{2\pi n} = \frac{U_g I}{2\pi n} = \frac{P_a}{2\pi n_0} \left[1 - \left(\frac{n}{n_0} \right)^2 \right] \frac{n}{n_0}, \quad (2.6)$$

mit der Anfahrverlustleistung

$$P_a = \frac{U^2}{R_i}. \quad (2.7)$$

Der Abfall des Drehmoments jenseits des Kippmoments ist wichtig, um einen stabilen Betriebspunkt zu ermöglichen (Beobachtung 3).

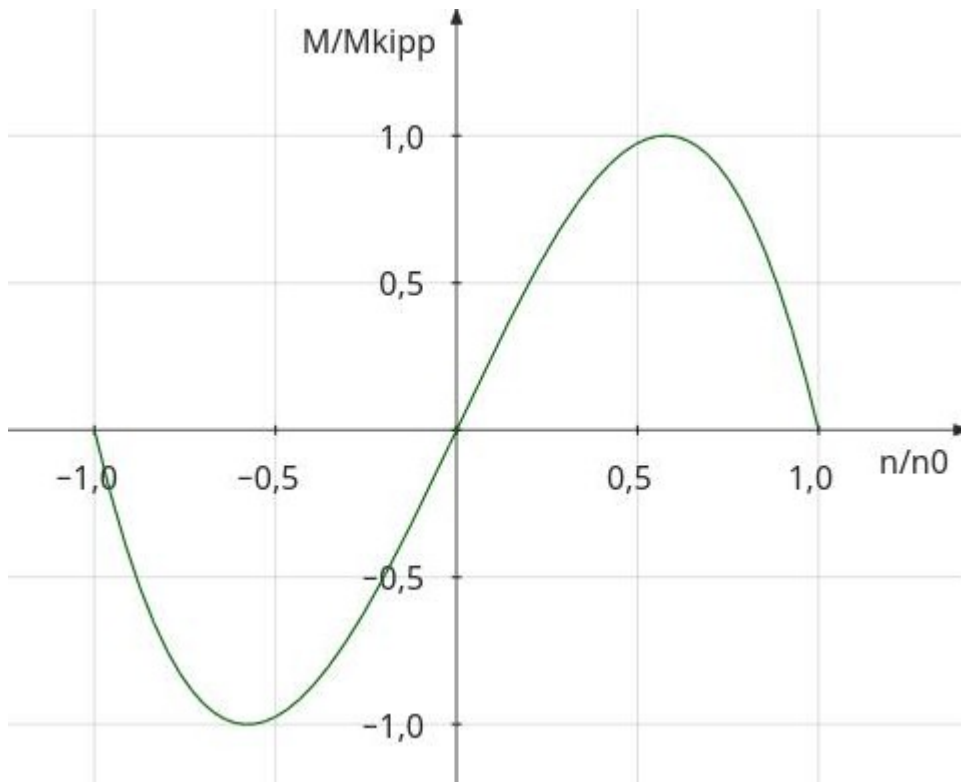


Abbildung 2. Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie für den Motorbetrieb.

Das Antriebsmoment sinkt dann nur soweit ab, bis nahe der Leerlaufdrehzahl ein stabiles Gleichgewicht mit dem Lastmoment erreicht ist. Die Drehzahl bleibt dann konstant. Das Kippmoment liegt bei

$$\frac{n_{\text{kipp}}}{n_0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2.8)$$

und ergibt sich zu

$$M_{\text{kipp}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{P_a}{\omega_0}. \quad (2.9)$$

Wird dem Motor ein größeres Lastmoment abverlangt, bleibt er stehen (er “kippt”). Dies geschieht auch, wenn bei gegebenem Lastmoment der Strom unter den Kippstrom

$$I_{\text{kipp}} = I(n_{\text{kipp}}) = \frac{2}{3} I_a \quad (2.10)$$

abgesenkt wird. Die elektrische Wirkleistung

$$P_{\text{el}} = UI \quad (2.11)$$

kann sowohl mit Gleich- als auch mit Wechselspannung zugeführt werden (Beobachtung 5). Im Fall von Wechselspannung ist für die Spannung der Effektivwert einzusetzen. Die Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie verläuft punktsymmetrisch durch den Ursprung, womit sich Beobachtung 2 und 4 wiederfinden. Für die mechanisch abgegebene Leistung gilt

$$P_{\text{mech}} = U_g I, \quad (2.12)$$

d. h. der Wirkungsgrad ist mit (2.2) und (2.5)

$$\eta = \frac{P_{\text{mech}}}{P_{\text{el}}} = \frac{U_g}{U} = \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 = 1 - \frac{I}{I_a}. \quad (2.13)$$

Werden (2.1b) und (2.1d) mit der Leerlaufdrehzahl (2.3) erweitert so gilt

$$U_g = \sqrt{\frac{k_{1\varphi}}{k_{2\varphi}}} A_\varphi \frac{n}{n_0} = v_{\varphi_0} A_\varphi \frac{n}{n_0}, \quad (2.14a)$$

$$A_\varphi = \sqrt{\frac{k_{2\varphi}}{k_{1\varphi}}} U \frac{n}{n_0} = \frac{1}{v_{\varphi_0}} U \frac{n}{n_0}. \quad (2.14b)$$

v_{φ_0} ist eine Geschwindigkeitskonstante. Um sie zu bestimmen, berechnen wir die Kraft mit Hilfe von [7]

$$\boxed{\vec{K}(r, z) = I\vec{A}(r, z)}. \quad (2.15)$$

Gemäß der in [7] gewählten Konvention für den Motorbetrieb werde der bei Klemme 1 ($r = r_0, z = \frac{l}{2}$) zufließende Strom negativ und der bei Klemme 2 ($r = r_0, z = -\frac{l}{2}$) abfließende Strom positiv gezählt. Da die Kraft an beiden Stellen aus Symmetriegründen gleich groß und die gleiche Richtung hat, muss das Vektorpotential den gleichen Betrag, aber entgegengesetzte Richtungen haben (Abb. (1)). Der Betrag des Drehmoments liefert, wenn beide Kräfte berücksichtigt werden:

$$M = 2r_0 I A_\varphi = \frac{2r_0}{v_{\varphi_0}} U I_a \left[1 - \left(\frac{n}{n_0}\right)^2\right] \frac{n}{n_0} = \frac{2r_0}{v_{\varphi_0}} P_a \left[1 - \left(\frac{n}{n_0}\right)^2\right] \frac{n}{n_0}. \quad (2.16)$$

Ein Vergleich mit (2.6) liefert

$$v_{\varphi_0} = 4\pi n_0 r_0. \quad (2.17)$$

Also ist

$$U_g = 4\pi r_0 A_\varphi n, \quad (2.18a)$$

$$A_\varphi = \frac{U}{4\pi r_0} \frac{n}{n_0^2} = A_\varphi(r_0, -\frac{l}{2}). \quad (2.18b)$$

Das Vektorpotential ist am Anfang ($n = 0$) nicht vorhanden. Es wird erst durch das Anwerfen angeregt und bildet eine Feldstruktur aus, die sich aus der Feldgleichung

$$\Delta \vec{A} = 0 \quad (2.19)$$

herleiten lässt (siehe Anhang 5.2).

Mit dem Gesamtfluss $\Phi = 4\pi r_0 A_\varphi$ lauten die vier Hauptgleichungen dann

$$U = U_g + IR_i, \quad (2.20a)$$

$$U_g = \Phi n, \quad (2.20b)$$

$$M = \frac{1}{2\pi} \Phi I, \quad (2.20c)$$

$$\Phi = \frac{U}{n_0^2} n. \quad (2.20d)$$

In dieser Form lassen die Gleichungen erkennen, dass der Kugellagermotor eine selbsterregte Unipolarmaschine ist. Eine Ständerwicklung ist nicht erforderlich.

2.1.1. *Bewegungsgleichung* Für die Untersuchung des dynamischen Verhaltens des Motors wird die Bewegungsgleichung aufgestellt, wobei ein verschwindendes Lastmoment angenommen wird. Mit (2.6) und

$$J\dot{\omega} = M \quad (2.21)$$

ergibt sich

$$J\dot{\omega} = \frac{P_a}{\omega_0} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (2.22)$$

Division auf beiden Seiten durch $\frac{1}{2}J\omega_0$ (ι ist eine dimensionslose Konstante) ergibt

$$\frac{2}{\iota} \frac{\dot{\omega}}{\omega_0} = \frac{P_a}{\frac{1}{2}J\omega_0^2} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (2.23)$$

Es werden nun folgende Normierungen gewählt:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (2.24a)$$

$$\tau = \omega_0 t, \quad (2.24b)$$

mit

$$\omega_0 := \frac{P_a}{\iota \frac{1}{2}J\omega_0^2} = \frac{P_a}{\iota T_{\text{Rot,max}}}. \quad (2.25)$$

Die Bewegungsgleichung lässt sich nun schreiben als

$$\frac{2}{\iota} \dot{\Omega} = (1 - \Omega^2)\Omega. \quad (2.26)$$

Der Punkt bedeutet nun die totale zeitliche Ableitung nach τ . Multiplikation mit Ω liefert

$$\frac{2}{\iota} \Omega \dot{\Omega} = (1 - \Omega^2)\Omega^2. \quad (2.27)$$

Durch die Substitution $\eta = \Omega^2$ (2.13) geht diese Gleichung über in

$$\dot{\eta} = \iota(1 - \eta)\eta. \quad (2.28)$$

Damit lässt sich der Wirkungsgrad η auch als Verhältnis zweier Rotationsenergien verstehen:

$$\eta = \frac{T_{\text{Rot}}}{T_{\text{Rot,max}}}. \quad (2.29)$$

Die zeitliche Ableitung des Wirkungsgrades ist dann die normierte mechanische Leistung:

$$\dot{\eta} = \frac{P_{\text{mech}}}{P_{\text{mech,max}}}. \quad (2.30)$$

Die mechanische Leistung ist mit (2.6):

$$P_{\text{mech}} = P_a \left[1 - \left(\frac{n}{n_0} \right)^2 \right] \left(\frac{n}{n_0} \right)^2 = P_a (1 - \eta)\eta. \quad (2.31)$$

Ihr Maximum ist

$$P_{\text{mech,max}} = \frac{P_a}{4}. \quad (2.32)$$

Daraus folgt, dass die dimensionslose Konstante

$$\iota = 4 \quad (2.33)$$

sein muss, sodass mit (2.25) gilt:

$$P_{\text{mech,max}} = T_{\text{Rot,max}} \omega_0. \quad (2.34)$$

Die Differenzialgleichung (2.28) hat als Lösung die logistische Funktion. Die Integration mittels Trennung der Variablen und anschließender Partialbruchzerlegung liefert

$$4(\tau - \tau_0) = \ln|\eta| - \ln|\eta - 1|, \quad (2.35)$$

oder nach Umformung

$$e^{-4(\tau-\tau_0)} = C e^{-4\tau} = \left|1 - \frac{1}{\eta}\right| = \begin{cases} \frac{1}{\Omega^2} - 1 & 0 < |\Omega| < 1, \\ 1 - \frac{1}{\Omega^2} & |\Omega| > 1. \end{cases} \quad (2.36)$$

Der obere der beiden Fälle beschreibt den Motor-, der untere den Generatorbetrieb. Der Einfachheit halber werden nun positive Drehzahlen Ω betrachtet. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung für den Motorbetrieb ist dann

$$\Omega(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 + C e^{-4\tau}}} = \frac{D e^{2\tau}}{\sqrt{1 + D^2 e^{4\tau}}}. \quad (2.37)$$

Dabei gilt

$$D = \frac{\Omega(0)}{\sqrt{1 - \Omega^2(0)}}, \quad 0 \leq \Omega(0) < 1 \quad (2.38)$$

mit der Drehzahl $\Omega(0)$ als Anfangswert, die ungleich Null gewählt werden muss, wenn die Maschine anlaufen soll (vgl. Beobachtung 2). Die Drehzahl nähert sich mit fortschreitender Zeit asymptotisch der Leerlaufdrehzahl an. *Der Motor zeigt ein asynchrones (untersynchrones) Betriebsverhalten.* In der Tat ähnelt die Drehzahl-Drehmoment-Kennlinie der eines Asynchronmotors im Einphasenbetrieb. Von diesen Maschinen ist bekannt, dass sie nicht von selbst anlaufen und angeworfen werden müssen. Die in (2.38) genannten Anfangswerte legen den Motorbetrieb fest.

2.2. Generatorbetrieb

Die Lösung der Bewegungsgleichung für den Generatorbetrieb ist

$$\Omega(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 - C e^{-4\tau}}}. \quad (2.39)$$

Hier gilt nun

$$C = 1 - \frac{1}{\Omega^2(0)}, \quad \Omega(0) \geq 1. \quad (2.40)$$

Wählt man als Anfangswert eine Drehzahl, die über der Leerlaufdrehzahl liegt, so liegt für kurze Zeit Generatorbetrieb (übersynchroner Betrieb) vor ($U_g > U$, d.h. $I < 0$). Der Rotor wird währenddessen abgebremst und nähert sich asymptotisch der Leerlaufdrehzahl an. Will man für den Generatorbetrieb dauerhaft eine Drehzahl oberhalb der Leerlaufdrehzahl aufrecht erhalten, so muss ein konstantes Antriebsmoment ($M < 0$) aufgebracht werden.

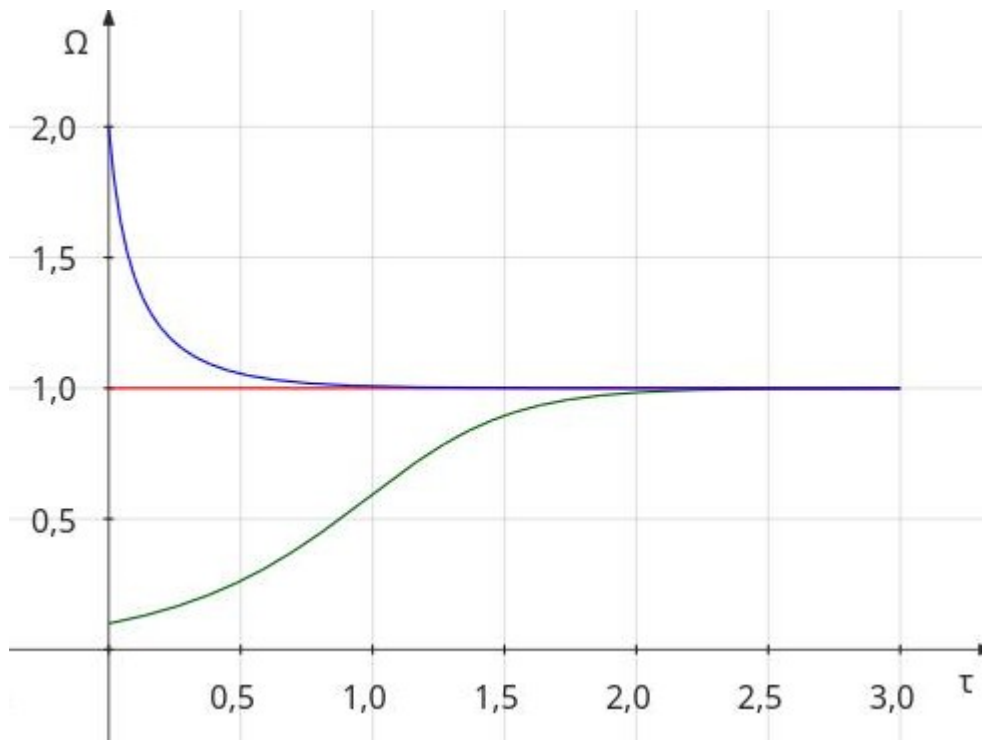


Abbildung 3. Beispiele für die Drehzahl als Funktion der Zeit: Beschleunigung (grüne Kurve) und Bremsen (blaue Kurve).

2.3. Leerlaufdrehzahl

Die Bewegungsgleichung liefert als singuläre Lösung $\Omega = 1$, d. h. die Leerlaufdrehzahl n_0 . Um sie zu bestimmen, kann als Ansatz (2.25) verwendet werden. Das liefert für die Leerlaufdrehzahl

$$n_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt[3]{\frac{P_a}{2J}}. \quad (2.41)$$

Wird diese Gleichung nach dem Trägheitsmoment J aufgelöst, kann dieses experimentell ermittelt werden. Dazu wird zunächst bei still stehendem Rotor der Widerstand R_i gemessen. Dann wird n_0 mit (2.4) und (2.5) bestimmt, indem zu einer vorgegebenen Spannung U der Strom I und die Drehzahl n gemessen werden. Bei einfacher Geometrie kann das Trägheitsmoment berechnet und mit dem gemessenen Wert verglichen werden. Für einen Zylinder der Masse m mit dem Außendurchmesser D und dem Innendurchmesser d gilt beispielsweise

$$J = \frac{1}{8}m(D^2 + d^2). \quad (2.42)$$

Zur Erhöhung der Messgenauigkeit wird das Experiment mit verschiedenen Spannungen wiederholt.

Für das Kippmoment (2.9) ergibt sich

$$M_{\text{kipp}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}J\omega_0^2. \quad (2.43)$$

Um ein hohes Kippmoment zu erreichen ist es sinnvoll, die Rotorwelle mit einem Schwungrad zu versehen (großes Trägheitsmoment), wie es in [3] und [4] zu sehen ist.

2.4. Ersatzschaltbild

Mit (2.1a) und (2.2) ergibt sich für den Widerstand zwischen den Klemmen 1 und 2

$$R = \frac{U}{I} = \frac{R_i}{1 - \left(\frac{n}{n_0}\right)^2}. \quad (2.44)$$

Es wird nun folgendes definiert:

$$s = \frac{I}{I_a}. \quad (2.45)$$

s wird als *Schlupf* bezeichnet. Für den Motorbetrieb gilt $1 \geq s > 0$ und den Generatorbetrieb $s < 0$. Mit (2.5) folgt dann

$$R = \frac{R_i}{s}. \quad (2.46)$$

Diese Darstellung ist von der Asynchronmaschine vertraut mit dem Unterschied, dass hier der Wirkwiderstand des Ständers und die Induktivitäten entfallen. Damit erhält man ein einfaches Ersatzschaltbild.

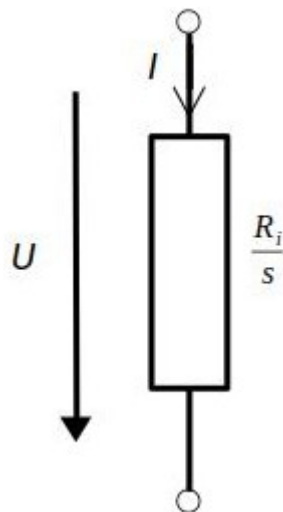


Abbildung 4. Ersatzschaltbild.

3. Ein Experiment

Um die in dieser Arbeit aufgestellte Theorie zu überprüfen, beschloss der Verfasser – dem Beispiel von [3] und [4] folgend – mit einem eigenen, nachgebauten Kugellagermotor zu experimentieren.

3.1. Der Bau des Motors

Der Bau eines Rotors mit Achse und Schwungrad erwies sich handwerklich als schwierig. Daher ging ich dazu über, aus einer ausgedienten Nähmaschine einen kompletten, gut erhaltenen Rotor auszubauen. Bei diesem ist ein bewickeltes, nicht magnetisiertes Blechpaket fertig verbaut, was als Schwungrad dient.

Der Rotor ist mit schwarzem Isolierband umwickelt und mit einer Reflektionsfolie beklebt, um die Drehzahl mit Hilfe eines Laser-Drehzahlmessers messen zu können (Abb. (5)).



Abbildung 5. Laser-Drehzahlmesser.

Passend zum Rotor gelang es, im Onlinehandel je einen Satz Lagerböcke und offene Kugellager zu beschaffen (Abb. (6) und (7)).



Abbildung 6. Lagerbock.



Abbildung 7. Offene Kugellager.

Alle Teile zusammengesteckt ergeben den fertigen Motor (Abb. (8)). Beim Befestigen der Lager in den Lagerböcken ist zu beachten, dass nur eines der beiden Lager fest mit dem Lagerbock verschraubt ist (Festlager), während das andere in seinem Lagerbock unverschraubt frei längs der Richtung der Welle gleiten kann (Loslager). Der elektrische Kontakt zwischen beiden muss dabei natürlich gewahrt bleiben. So wird ein reibungsarmer Lauf des Rotors möglich.



Abbildung 8. Motor.

Der Motor wird auf ein Holzbrett geschraubt und über zwei Kabel an ein Netzgerät mit Gleichspannung angeschlossen, sodass sich der folgende Versuchsaufbau ergibt:



Abbildung 9. Versuchsaufbau.

3.2. Test der Theorie

Um die Theorie zu prüfen gibt es die Möglichkeit, die Gleichung für die Leerlaufdrehzahl (2.41) zu verwenden. Zusammen mit (2.7) gilt dann

$$n_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt[3]{\frac{U^2}{2R_i J}}, \quad (3.1)$$

oder als zugeschnittene Größengleichung

$$\left(\frac{n_0}{\text{min}^{-1}}\right) = \frac{3000}{\pi \sqrt[3]{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{R_i}{\Omega}\right)\left(\frac{J}{\text{kg mm}^2}\right)}} \left(\frac{U}{\text{V}}\right)^{\frac{2}{3}} \approx \frac{758}{\sqrt[3]{\left(\frac{R_i}{\Omega}\right)\left(\frac{J}{\text{kg mm}^2}\right)}} \left(\frac{U}{\text{V}}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.2)$$

Für verschiedene, vorgegebene Eingangsspannungen U erhält man dann nach einem Potenzgesetz unterschiedliche Leerlaufdrehzahlen n_0 . Da die Leerlaufdrehzahl aber asymptotisch ist und daher nie erreicht wird, ist sie einer direkten Messung nicht zugänglich. Außerdem ist der Wert des Trägheitsmomentes J nicht bekannt. Daher muss die Leerlaufdrehzahl über einen Umweg bestimmt werden.

Mit (2.44) und (2.13) gilt auch

$$n_0 = \frac{n}{\sqrt{1 - \frac{I}{U} R_i}} = \frac{n}{\sqrt{1 - \frac{R_i}{R}}} = \frac{n}{\sqrt{\eta}}, \quad (3.3)$$

oder als zugeschnittene Größengleichung

$$\left(\frac{n_0}{\text{min}^{-1}}\right) = \frac{\left(\frac{n}{\text{min}^{-1}}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{I}{U}\right)\left(\frac{R_i}{\Omega}\right)}} = \frac{\left(\frac{n}{\text{min}^{-1}}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{R_i}{R}\right)}} = \frac{\left(\frac{n}{\text{min}^{-1}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\eta}{100\%}\right)}}. \quad (3.4)$$

Das bedeutet, dass n_0 folgendermaßen bestimmt werden kann: Man misst zunächst einmalig bei Motorstillstand R_i und danach bei laufendem Motor für verschiedene, vorgegebene U die Werte von I und n . Aus diesen Werten kann über die Berechnung von Eingangswiderstand R

und Wirkungsgrad η die gesuchten n_0 ermittelt werden. Alle Werte werden in einer Tabelle erfasst (Abb. (10)).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	U[V]	I[A]	n[min^{-1}]	R[Ω]	η [%]	n_0 [min^{-1}]	J [kgmm ²]			
2	4,3	6,23	1266	0,690	54,9	1708	5,195			
3	4,4	6,23	1463	0,706	56,0	1956	3,624			
4	4,5	6,23	1491	0,722	56,9	1976	3,675			
5	4,7	6,23	1494	0,754	58,8	1949	4,179	R_i [Ω]		0,311
6	5	6,23	1605	0,803	61,2	2051	4,058	J_μ [kgmm ²]		4,255
7	5,2	6,23	1624	0,835	62,7	2050	4,392	σ_i [kgmm ²]		0,470
8	5,4	6,23	1678	0,867	64,1	2096	4,436			
9	5,5	6,23	1702	0,883	64,8	2115	4,478	n_1 [min^{-1}]		
10									1	758
11									10	3518

Abbildung 10. Tabelle mit Messwerten.

In einem Diagramm, in dem n_0 gegen U aufgetragen wird, sollte sich dann ein Potenzgesetz gemäß (3.2) zeigen. Dazu wird durch eine Regressionsanalyse aus den n_0 eine Potenzfunktion in der Form

$$y = ax^b \quad (3.5)$$

bestimmt. Softwareprogramme wie Excel oder LibreOffice Calc bieten eine solche Analyse und grafische Darstellung an. In einem Diagramm mit logarithmischer Teilung der x- und y-Achse erscheint diese Funktion als Gerade mit der Steigung b (Abb. (11)). Ist in (3.2) der Wert der Kubikwurzel im Nenner gleich 1, erhält man die gestrichelte, rote Gerade mit Steigung $\frac{2}{3}$. Ist der Wert kleiner, wird die Gerade parallel nach oben, andernfalls nach unten verschoben.

Die berechneten n_0 (grüne Punkte) liegen über den gemessenen n (blaue Punkte), wie es sein muss. Für die n_0 ergibt sich aus (3.5) die durchgezogene, grüne Gerade. Die Tatsache, dass diese Gerade fast parallel zur Gestrichelten liegt, liefert ein Indiz für die Gültigkeit von (3.2).

Da die n_0 jetzt bekannt sind, können mit Hilfe von (3.2) nach Auflösen die jeweiligen Trägheitsmomente J berechnet werden. Aus diesen wiederum ergibt sich ein Mittelwert J_μ (Zelle J6 in Abb. (10)) für das gesuchte Trägheitsmoment. So lässt sich dieses anhand eines solchen Experimentes messen.

Die Kubikwurzel $\sqrt[3]{R_i J_\mu}$ liefert einen Wert von ungefähr 1, $1 > 1$. Die Gerade liegt also unter der Gestrichelten, wie auch in Abb. (11) zu sehen ist.

Infolge des hohen Stroms erhitzen sich die Lager und Lagerböcke. Ein Magnetfeld mit radialer Komponente, welche an Stelle eines azimuthalen Vektorpotentials den Motor mit Hilfe der Lorentzkraft antreiben würde, konnte *nicht* festgestellt werden.

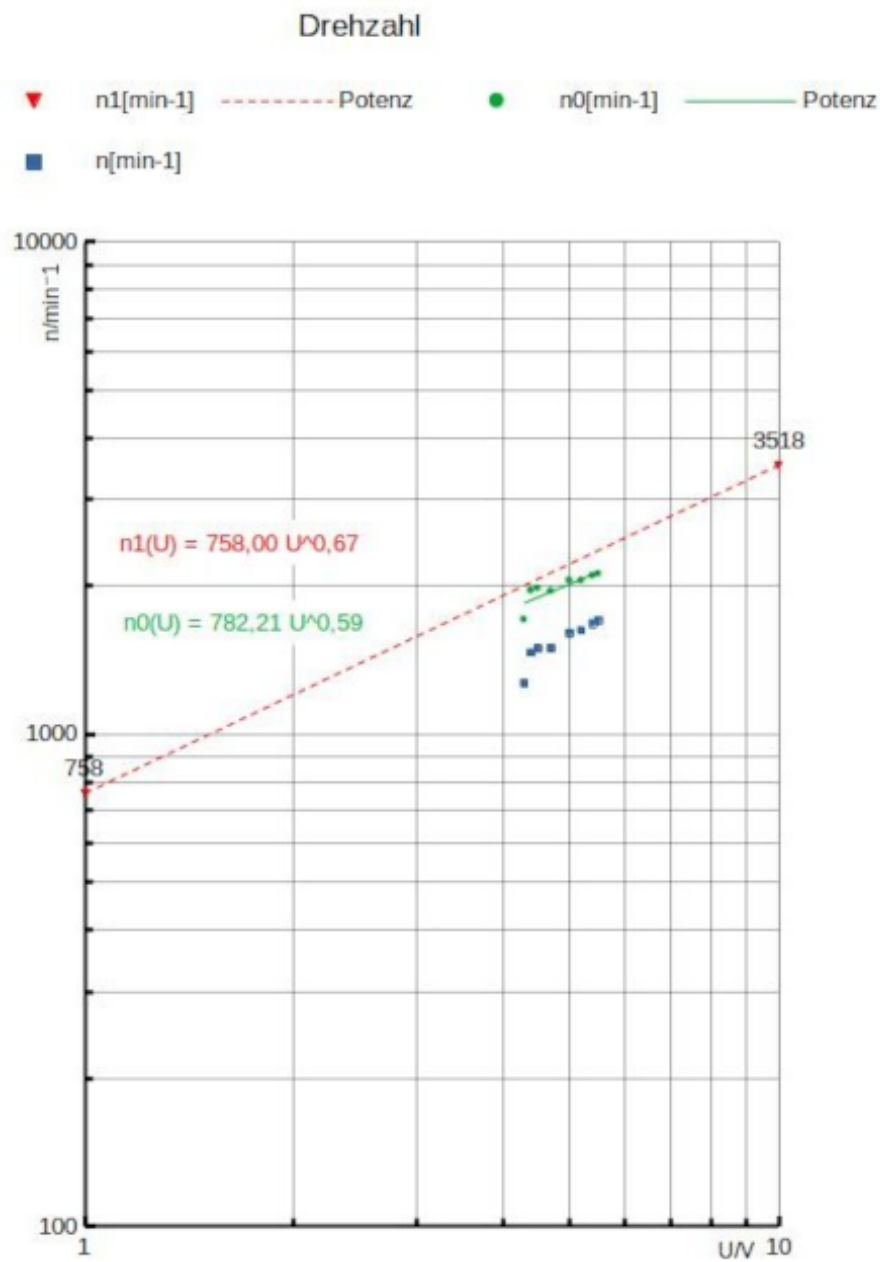


Abbildung 11. Drehzahl über der angelegten Spannung.

Tabelle 1. Technische Daten

Länge	132 mm
Breite	42 mm
Höhe	43 mm
Wellendurchmesser	6 mm
Rotormasse	0,19 kg
Trägheitsmoment	4,255 kgmm ²
Innenwiderstand	0,311 Ω
Drehzahl (bei 5,5 V)	1702 U/min
Wirkungsgrad (bei 5,5 V)	64,8 %
Leistung (bei 5,5 V)	22,2 W

4. Zusammenfassung

Der Kugellagermotor hat folgende Eigenschaften:

- Er funktioniert wie eine Reihenschlussmaschine sowohl mit Gleich- als auch mit Wechselstrom.
- Er kann in beiden Drehrichtungen betrieben werden.
- Er beschleunigt von einem instabilen Betriebspunkt bei $n = 0$ in Anlaufrichtung in einen stabilen Betriebspunkt nahe n_0 .
- Wie bei einem Asynchronmotor im Einphasenbetrieb läuft er nicht von selbst an und muss angeworfen werden.

Der Kugellagermotor sollte der Theorie zufolge auch folgende Eigenschaften haben, die sich experimentell überprüfen lassen:

- Das Vektorpotential (eine azimutale Komponente) ist nur beim Anlauf nicht vorhanden. Es baut sich erst bei Bewegung von selbst auf (Selbsterregung, Gleichung (2.20d)), ähnlich wie beim dynamoelektrischen Prinzip. Dies würde bedeuten, dass der Antrieb des Kugellagermotors nicht thermisch-mechanisch durch die Kugeln erfolgt.
- Wie bei einem Asynchronmotor wird die Leerlaufdrehzahl (Gleichung (2.41)) nie ganz erreicht, d. h. der Kugellagermotor kann einen hohen Wirkungsgrad (etwa 60 % oder mehr) erreichen.
- Die vier Hauptgleichungen (2.20a) bis (2.20d) sind von der Geometrie unabhängig. Dies legt nahe, dass sich der Kugellagermotor (besser: "selbsterregte Unipolarmaschine") nicht nur als Trommeltyp, sondern auch als Scheibentyp [1] konstruieren lässt.
- Wird der Motor selbst mit einer Drehzahl angetrieben, die größer als die Leerlaufdrehzahl ist (übersynchroner Betrieb), wird er zum Generator.

Ein erstes experimentelles Ergebnis zeigt, dass die in [8] entwickelte Theorie der konservativen Elektrodynamik nicht falsch ist.

5. Anhang

5.1. Erzeugung des Vektorpotentials aus der Nebenbedingung

Der intuitiv gewonnene Ansatz (2.1d) kann auch wie folgt hergeleitet werden. Der Ausgangspunkt ist die in [8] (Kapitel 4.1.2) aufgestellte Nebenbedingung

$$V_0 = A_\beta u^\beta. \quad (5.1)$$

Umgekehrt ist

$$A_\beta = \frac{V_0}{c^2} u_\beta, \quad (5.2)$$

denn Einsetzen von (5.2) in (5.1) liefert

$$V_0 = \frac{V_0}{c^2} u_\beta u^\beta = \frac{V_0}{c^2} c^2 = V_0. \quad (5.3)$$

Für $u \ll c$ lautet (5.1)

$$V_0 = V - \vec{v}\vec{A}. \quad (5.4)$$

Für $V = 0$ (d. h. ohne freie Ladungen) gilt dann die Nebenbedingung in den beiden Formen

$$V_0 = -\vec{v}\vec{A}, \quad (5.5a)$$

$$\vec{A} = -\frac{V_0}{v^2} \vec{v}. \quad (5.5b)$$

Da in (5.2) $A_\beta \propto u_\beta$, gilt dies auch für die räumlichen Komponenten \vec{A} und \vec{v} ($\vec{A} \propto \vec{v}$). Mit (5.5b) muss dann $V_0 \propto v^2$, d. h.

$$\frac{V_0}{v^2} = \frac{V_{g0}}{v_0^2} \quad (5.6)$$

sein. Es gilt bei $z = \frac{l}{2}$ (Abb. (1)):

$$V_0 = \frac{U_g}{2}, \quad (5.7a)$$

$$V_{g0} = \frac{U}{2}, \quad (5.7b)$$

$$\vec{A} = -A_\varphi \vec{e}_\varphi, \quad (5.7c)$$

$$\vec{v} = 2\pi r_0 n \vec{e}_\varphi. \quad (5.7d)$$

U und U_g hängen dabei über die Maschengleichung miteinander zusammen. Aus (5.6) folgt wie in Formel (2.2)

$$U_g = \frac{U}{n_0^2} n^2 \quad (5.8)$$

und damit schließlich dann wie in den Formeln (2.18a) und (2.18b)

$$U_g = 4\pi r_0 A_\varphi n, \quad (5.9a)$$

$$A_\varphi = \frac{U}{4\pi r_0} \frac{n}{n_0^2}. \quad (5.9b)$$

5.2. Herleitung der Feldstruktur des Vektorpotentials

Da für die Funktion des Kugellagermotors nur die azimutale Komponente des Vektorpotentials eine Rolle spielt, gilt für die Feldgleichung (2.19)

$$\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} - \frac{A_\varphi}{r^2} = 0. \quad (5.10)$$

Diese Gleichung lässt sich mit dem Separationsansatz

$$A_\varphi(r, z) = \left(\frac{c_1}{r} + c_2 r\right)(c_3 z + c_4) \quad (5.11)$$

lösen. Es werden folgende zwei Gebiete betrachtet:

$$\begin{aligned} 0 \leq r \leq r_0, \quad -\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2}, \quad (\text{Gebiet I}), \\ r > r_0, \quad -\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2}, \quad (\text{Gebiet II}). \end{aligned}$$

Die Rand- und Stetigkeitsbedingungen lauten

$$A_{\text{I}\varphi}(0, z) = 0, \quad (5.12)$$

$$A_{\text{I}\varphi}(r_0, z) = A_{\text{II}\varphi}(r_0, z), \quad (5.13)$$

$$A_{\text{II}\varphi}(\infty, z) = 0. \quad (5.14)$$

Aus Symmetriegründen muss in beiden Gebieten gelten:

$$A_\varphi(r, -z) = -A_\varphi(r, z). \quad (5.15)$$

Mit diesen Bedingungen und mit (2.18b) ergibt sich für das Vektorpotential:

$$A_\varphi(r, z) = \begin{cases} -\frac{U}{2\pi l r_0^2} \frac{n}{n_0^2} r z & (\text{Gebiet I}), \\ -\frac{U}{2\pi l} \frac{n}{n_0^2} \frac{z}{r} & (\text{Gebiet II}). \end{cases} \quad (5.16)$$

Für ein mathematisch mögliches Magnetfeld ergibt sich dann mit $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$:

$$B_r(r, z) = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = \begin{cases} \frac{U}{2\pi l r_0^2} \frac{n}{n_0^2} r & (\text{Gebiet I}), \\ \frac{U}{2\pi l} \frac{n}{n_0^2} \frac{1}{r} & (\text{Gebiet II}), \end{cases} \quad (5.17)$$

$$B_z(r, z) = \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} = \begin{cases} -\frac{U}{\pi l r_0^2} \frac{n}{n_0^2} z & (\text{Gebiet I}), \\ 0 & (\text{Gebiet II}). \end{cases} \quad (5.18)$$

Gleichung (5.17) erfüllt die Stetigkeitsbedingung

$$B_{\text{I}r}(r_0) = B_{\text{II}r}(r_0) = \frac{U}{2\pi l r_0} \frac{n}{n_0^2}. \quad (5.19)$$

Dieses Magnetfeld wird aber nicht erzeugt, da hier kein azimutaler Kreisstrom vorliegt. Statt dessen wird ein Vektorpotential über die Nebenbedingung (2.18b) angeregt.

5.3. Nachweismethode des Vektorpotentials bei Verwendung von Wechselspannung

Es sei

$$U = \hat{U} \sin \omega t. \quad (5.20)$$

Damit folgt mit (5.16) für das Vektorpotential

$$A_\varphi(t, r, z) = -\frac{U}{2\pi l} \frac{n}{n_0^2} \frac{z}{r} = -\frac{\hat{U}}{2\pi l} \frac{n}{n_0^2} \frac{z}{r} \sin \omega t = -\hat{A}_\varphi(r, z) \sin \omega t. \quad (5.21)$$

Um die Welle werde nun eine kreisförmige Leiterschleife mit Radius $r > r_0$ gelegt und an ein Spannungsmessgerät angeschlossen. Dann wird in ihr eine Wechselspannung induziert und gemessen:

$$U_\varphi = 2\pi r E_\varphi = -2\pi r \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} = 2\pi r \omega \hat{A}_\varphi(r, z) \cos \omega t = \hat{U}_\varphi(z) \cos \omega t. \quad (5.22)$$

Die Amplitude des Vektorpotentials kann dann über die folgende Beziehung bestimmt werden:

$$\hat{A}_\varphi(r, z) = \frac{\hat{U}_\varphi(z)}{2\pi r \omega}. \quad (5.23)$$

5.4. Modellierung der Maschine mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung

Das Modell der Maschine lässt sich auch mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung angeben [9]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_n} = K_n. \quad (5.24)$$

Darin bedeuten L die Lagrangefunktion, D die Rayleighsche Dissipationsfunktion, q_n verallgemeinerte Koordinaten und K_n verallgemeinerte Kräfte. Mit n werden die Freiheitsgrade des Systems bezeichnet. Für jeden Freiheitsgrad wird eine Gleichung aufgestellt. In diesem System gibt es zwei Freiheitsgrade und damit zwei verallgemeinerte Koordinaten: Der Winkel $\varphi = q_1$, ($\dot{\varphi} = \omega$) und die Ladung $q = q_2$, ($\dot{q} = I$). Es müssen also zwei Gleichungen aufgestellt werden. Die Lagrangefunktion setzt sich aus kinetischer (T) und potentieller Energie (V) zusammen:

$$L(\dot{q}_n, q_n) = T - V. \quad (5.25)$$

Die kinetische Energie lautet

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} J \omega^2. \quad (5.26)$$

Für die potentielle Energie gilt hier mit (2.15) und (2.18b) (beide Kräfte berücksichtigen):

$$V = - \int \vec{K} d\vec{x} = -2 \int K_\varphi r_0 d\varphi = -2 \int I A_\varphi r_0 d\varphi = -IU \frac{\omega}{\omega_0^2} (\varphi - \varphi_0). \quad (5.27)$$

Ferner soll die Nebenbedingung $V = V(I, \varphi)$ gelten, d. h. V soll nicht von ω abhängen. Demnach lautet die Lagrangefunktion

$$L(\omega, I, \varphi, q) = \frac{1}{2} J \omega^2 + IU \frac{\omega}{\omega_0^2} (\varphi - \varphi_0) - \lambda [IU \frac{\omega}{\omega_0^2} (\varphi - \varphi_0) + V(I, \varphi)]. \quad (5.28)$$

Es ist wie in [8] (Kapitel 4.1.2) der Lagrange-Multiplikator $\lambda = 1$ zu wählen. In der Dissipationsfunktion werden Reibungsverluste (Konstante B) in den Lagern und ohmsche Verluste im Läufer wie folgt angesetzt:

$$D(\omega, I) = \frac{1}{2}B\omega^2 + \frac{1}{2}R_i I^2. \quad (5.29)$$

Die verallgemeinerten Kräfte sind das Lastmoment $M_L = K_1$ und die konstante Spannung $U = K_2$. Es gilt:

$$\frac{\partial L}{\partial \omega} = J\omega, \quad (5.30a)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \omega} = J\dot{\omega}, \quad (5.30b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = IU \frac{\omega}{\omega_0^2}, \quad (5.30c)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \omega} = B\omega. \quad (5.30d)$$

In (5.30a) ist zu berücksichtigen, dass wegen der Nebenbedingung die partielle Ableitung $\frac{\partial V}{\partial \omega}$ verschwindet. Weiter ist

$$\frac{\partial L}{\partial I} = U \frac{\omega}{\omega_0^2} (\varphi - \varphi_0), \quad (5.31a)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial L}{\partial I} \right) \frac{d\varphi}{dt} = U \frac{\omega}{\omega_0^2} \dot{\varphi} = U \frac{\omega^2}{\omega_0^2}, \quad (5.31b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (5.31c)$$

$$\frac{\partial D}{\partial I} = R_i I. \quad (5.31d)$$

In (5.31b) gibt die Nebenbedingung vor, dass der Term (5.31a) erst nach dem Ort und dann nach der Zeit abgeleitet werden muss, d. h. es gilt die Kettenregel. Die beiden Euler-Lagrange-Gleichungen lauten nun:

$$J\dot{\omega} - IU \frac{\omega}{\omega_0^2} + B\omega = M_L, \quad (5.32a)$$

$$U \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + R_i I = U. \quad (5.32b)$$

Gleichung (5.32b) entspricht (2.5). Aufgelöst nach I und eingesetzt in (5.32a) ergibt sich als Verallgemeinerung der Bewegungsgleichung (2.22):

$$J\dot{\omega} - \frac{P_a}{\omega_0} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \frac{\omega}{\omega_0} + B\omega = M_L. \quad (5.33)$$

Diese Gleichung soll nun für den Fall eines verschwindenden Lastmoments gelöst werden; es wird nun die Reibung der Lager berücksichtigt. Multiplikation mit 2ω ergibt

$$2J\omega\dot{\omega} - 2P_a \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 2B\omega^2 = 0. \quad (5.34)$$

Mit der Substitution $\eta = \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2$ und der Normierung $\tau = \omega_0 t$ entsteht

$$\dot{\eta} - \frac{2P_a}{J\omega_0^3} (1 - \eta)\eta + \frac{2B}{J\omega_0} \eta = 0. \quad (5.35)$$

Mit den Abkürzungen

$$\iota = \frac{2P_a}{J\omega_0^3}, \quad (5.36a)$$

$$\kappa = \frac{2B}{J\omega_0} \quad (5.36b)$$

wird daraus

$$\dot{\eta} - (\iota - \kappa)\eta + \iota\eta^2 = 0. \quad (5.37)$$

Dies ist die Bernoullische Differentialgleichung. Sie wird durch die Substitution $z = \frac{1}{\eta}$ zu einer inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\dot{z} + (\iota - \kappa)z = \iota, \quad (5.38)$$

die mit der Methode der Variation der Konstanten gelöst wird. Schließlich ergibt sich für η :

$$\eta(\tau) = \frac{1 - \frac{\kappa}{\iota}}{1 + c(1 - \frac{\kappa}{\iota})e^{-\iota(1 - \frac{\kappa}{\iota})\tau}}. \quad (5.39)$$

Wird wieder $\iota = 4$ gewählt, so werden die Leerlaufdrehzahl und der maximal mögliche Wirkungsgrad durch die Reibung um einen Faktor $1 - \frac{\kappa}{4}$ verringert.

6. Quellenhinweise

- [1] BARKER R. H.: *Ball-race motor*. Electronics & Power, Vol. 11, Issue 1, January 1965, p. 38.
- [2] MILROY R. A.: *Hydrodynamic Gyroscope*. Journal of Applied Mechanics, Vol. 34(2), 1967, p. 525.
- [3] <https://youtu.be/f1xnQ9gWy1o?t=5>.
- [4] <https://www.youtube.com/watch?v=JhKcaWpodyI>.
- [5] WATSON D. B., PATEL S. M., SEDCOLE N. P.: *Ball-bearing motor effect with rolling cylinders*. IEE Proc. Sci. Meas. Technol., Vol. 146, 1999, p. 83.
- [6] McDONALD K. T.: *Ball-Bearing Motor*. Princeton University, Princeton, 2011.
- [7] SCHNEIDER Tilmann: *Die Unipolarmaschine zweiter Art*. Bonn : urn:nbn:de:101:1-2015020917870, 2015.
- [8] SCHNEIDER, Tilmann: *Über elektromagnetische Längskräfte in stromdurchflossenen Leitern*. Bonn : urn:nbn:de:101:1-2405041729402.486656265472, 2024.
- [9] MARX B., SÜSSE R. *Theoretische Elektrotechnik Band 1: Variationsrechnung und Maxwellsche Gleichungen*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994