Zur Bewegung im Zentralfeld eines Vektorpotentials

27.03.2021

Tilmann Schneider

Rüdesheimer Str. 58, D-53175 Bonn

E-mail: admin@relativistische-asynchronmaschine.de

Abstract. This paper discusses how a charged particle moves in a vector potential where the magnetic field is zero. For this purpose, an energy theorem is established with the help of an extended Lagrangian function of electrodynamics (called conservative electrodynamics). The resulting equation of motion contains a central force that depends on the vector potential. Trajectories can be calculated from the energy theorem. These include circular paths in bound states. With the presented approach, the Aharonov-Bohm effect can also be studied in more detail.

Zusammenfassung. In dieser Arbeit wird diskutiert, wie sich ein geladenes Teilchen in einem Vektorpotential bewegt, bei dem das Magnetfeld Null ist. Dazu wird mit Hilfe einer erweiterten Lagrangefunktion der Elektrodynamik (konservative Elektrodynamik genannt) ein Energiesatz aufgestellt. Die daraus resultierende Bewegungsgleichung enthält eine Zentralkraft, die vom Vektorpotential abhängt. Aus dem Energiesatz lassen sich Bahnkurven berechnen. Dazu gehören Kreisbahnen in gebundenen Zuständen. Mit dem dargelegten Ansatz lässt sich auch der Aharonov-Bohm-Effekt genauer untersuchen.

PACS numbers: 41.20.-q

urn:nbn:de:101:1-2021032716452434532384

1. Herleitung der relativistischen Bewegungsgleichung aus dem Energiesatz

In [1] wurde die relativistische Bewegungsgleichung aus der folgenden Lagrangefunktion hergeleitet:

$$L = -mc\sqrt{u_\beta u^\beta} - qA_\beta u^\beta + \lambda q(A_\beta u^\beta - V). \tag{1.1}$$

Alternativ dazu ist auch die Herleitung aus dem Energiesatz möglich. Um ihn aufzustellen, ist eine andere Form der Lagrangefunktion zweckmäßig. Diese baut auf der in [2] erwähnten auf und lautet:

$$L = -\frac{1}{2}mc^2 - \frac{1}{2}mu_\beta u^\beta - qA_\beta u^\beta + \lambda q(A_\beta u^\beta - V). \tag{1.2}$$

Da sie nicht explizit von der Eigenzeit τ abhängt, ist die Gesamtenergie E eine Erhaltungsgröße. Sie berechnet sich zu

$$E = u^\beta \frac{\partial L}{\partial u^\beta} - L = \frac{1}{2}mc^2 - \frac{1}{2}mu_\beta u^\beta + \lambda qV. \tag{1.3}$$

Für $\lambda = 1$ (konservative Elektrodynamik) können Lagrangefunktion und Gesamtenergie in die folgende Form gebracht werden:

$$L = -\frac{1}{2}mu_\beta u^\beta - (\frac{1}{2}mc^2 + qV) = T - U, \tag{1.4}$$

$$E = -\frac{1}{2}mu_\beta u^\beta + \frac{1}{2}mc^2 + qV = T + U. \tag{1.5}$$

Dabei gilt

$$T = -\frac{1}{2}mu_\beta u^\beta, \quad \text{(kinetische Energie)}, \tag{1.6}$$

$$U = \frac{1}{2}mc^2 + qV, \quad \text{(potentielle Energie)}. \tag{1.7}$$

Um die Bewegungsgleichung zu erhalten, wird die Gleichung der Gesamtenergie einmal nach τ abgeleitet. Mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = u^\alpha \partial_\alpha \tag{1.8}$$

folgt nach einiger Rechnung

$$0 = u^\alpha(-m\dot{u}_\alpha + q\partial_\alpha V). \tag{1.9}$$

Diese Gleichung ist dann und nur dann erfüllt, wenn der Inhalt der Klammer verschwindet. Mit der Nebenbedingung

$$V = A_\beta u^\beta \tag{1.10}$$

gilt dann die Bewegungsgleichung

$$m\dot{u}_\alpha = q\partial_\alpha A_\beta u^\beta. \tag{1.11}$$

2. Zentralkraft in einem Vektorpotential

Im nicht-relativistischen Fall gilt für die Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} - q(V_0 - \vec{A}\vec{v}) + \lambda q(V_0 - \vec{A}\vec{v} - V). \tag{2.1}$$

Daraus folgt für die Gesamtenergie

$$E = \vec{v}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} + (1-\lambda)qV_0 + \lambda qV. \tag{2.2}$$

mit $\lambda = 1$ ergibt sich dann

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} - qV, \tag{2.3}$$

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} + qV. \tag{2.4}$$

Es gilt die Nebenbedingung

$$V = V_0 - \vec{A}\vec{v}. \tag{2.5}$$

Nun wird das folgende Beispiel betrachtet: Ein geladenes Teilchen bewege sich in der x-y-Ebene an einer sehr langen, idealen Zylinderspule vorbei, die die Ebene im Ursprung senkrecht durchstößt. Ideal heißt, dass diese Spule keinen Streufluss besitzt und somit das Magnetfeld außen gleich Null ist. Für das Vektorpotential ist

$$\vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi r}\vec{e}_\varphi. \tag{2.6}$$

Ferner gelte $V_0 = 0$ und für die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + \dot{\varphi}r\vec{e}_\varphi. \tag{2.7}$$

Für die Lagrangefunktion gilt dann

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2) - qV. \tag{2.8}$$

Sie hängt nicht explizit von φ ab. Es gilt daher die Drehimpulserhaltung

$$l = m\dot{\varphi}r^2. \tag{2.9}$$

Die Nebenbedingung lautet

$$V(r) = V_0 - \vec{A}\vec{v} = -A_\varphi v_\varphi = -\frac{\Phi}{2\pi r}\dot{\varphi}r = -\frac{\Phi l}{2\pi m r^2}, \tag{2.10}$$

und damit die Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{q\Phi l}{2\pi m r^2}. \tag{2.11}$$

Für die Gesamtenergie folgt daraus

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2) + qV = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{q\Phi l}{2\pi m r^2}. \tag{2.12}$$

Ableiten nach der Zeit führt auf die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} - \frac{q\Phi l}{\pi m r^3}. \tag{2.13}$$

Der zweite Term auf der rechten Seite ist eine vom magnetischen Fluss verursachte und radial zum Zentrum gerichtete Kraft. Für diese gilt mit $\dot{\varphi} = \omega_\mathrm{z}$

$$\vec{K} = -2qA_\varphi \dot{\varphi}\vec{e}_r = -2qA_\varphi \omega_\mathrm{z}\vec{e}_r = -2q\vec{A} \times \vec{\omega}. \tag{2.14}$$

Sie beschreibt die Wechselwirkung eines geladenen und bewegten Teilchens mit einem Vektorpotential. Es ist zu erwarten, dass dieses Teilchen – analog zur Corioliskraft in der klassischen Mechanik – auf seiner Bahn abgelenkt wird. Diese Ablenkung soll nun untersucht werden.

3. Berechnung der Bahnkurve

Da die Formel für die Gesamtenergie (2.12) bereits die einmalige Integration der Bewegungsgleichung (2.13) darstellt genügt es, diese zur Berechnung der Bahnkurve zu verwenden. Es gilt

$$\frac{2E}{m} = \dot{r}^2 + \frac{l}{m^2 r^2}(l - \frac{q\Phi}{\pi}). \tag{3.1}$$

Zur Abkürzung wird gesetzt

$$l_\Phi = \frac{q\Phi}{\pi}, \tag{3.2}$$

$$A = \frac{l(l - l_\Phi)}{m^2}. \tag{3.3}$$

Damit folgt

$$\frac{2E}{m} = \dot{r}^2 + \frac{A}{r^2}. \tag{3.4}$$

Für $r \to \infty$ erhält man eine gleichförmige Geschwindigkeit, d. h.

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}}. \tag{3.5}$$

Dazu muss die Gesamtenergie größer als Null sein. Passiert das Teilchen die Spule bei einer bestimmten Entfernung $r = a$, so muss dort die Radialgeschwindigkeit verschwinden, d. h.

$$A = a^2 {v_\infty}^2. \tag{3.6}$$

Dann lautet (3.4):

$$\dot{r}^2 = {v_\infty}^2(1 - \frac{a^2}{r^2}). \tag{3.7}$$

Zur Lösung von (3.7) wird der Ansatz

$$r(t) = \frac{a}{\cos[B\varphi(t) + C]} \tag{3.8}$$

mit den Konstanten B und C probiert. Abgeleitet nach der Zeit und mit (2.9) ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot{r}(t) &= \frac{a}{\cos^2[B\varphi(t)+C]}\sin[B\varphi(t)+C]B\dot{\varphi}(t)\\ &= \frac{B\dot{\varphi}(t)r^2(t)}{a}\sin[B\varphi(t)+C]\\ &= \frac{Bl}{ma}\sin[B\varphi(t)+C].\end{aligned} \tag{3.9}$$

Einsetzen von (3.8) und (3.9) in (3.7) ergibt

$$(\frac{Bl}{mv_\infty a})^2\sin^2[B\varphi(t)+C]+\cos^2[B\varphi(t)+C]=1. \tag{3.10}$$

Wird

$$B=\frac{mv_\infty a}{l} \tag{3.11}$$

gewählt, erfüllt der Ansatz (3.8) die Differentialgleichung (3.7). Der Drehimpuls l ergibt sich aus (3.3), (3.5) und (3.6) zu

$$l=\frac{l_\Phi}{2}\pm\sqrt{(\frac{l_\Phi}{2})^2+2Ema^2}, \tag{3.12}$$

Damit wird (3.8):

$$r(t)=\frac{a}{\cos\{B[\varphi(t)-\varphi_0]\}}, \tag{3.13}$$

wobei $C=-B\varphi_0$ gesetzt wird. Dies eingesetzt in (2.9) liefert die Differentialgleichung

$$\dot{\varphi}=\frac{l}{mr^2}=\frac{l}{ma^2}\cos^2\{B[\varphi(t)-\varphi_0]\}=\frac{v_\infty}{aB}\cos^2\{B[\varphi(t)-\varphi_0]\}. \tag{3.14}$$

Nach Trennung der Variablen und Integration ergibt sich

$$\varphi(t)=\frac{1}{B}\arctan[\frac{v_\infty}{a}(t-t_0)]+\varphi_0 \tag{3.15}$$

und damit aus (3.13)

$$r(t)=a\sqrt{1+(\frac{v_\infty}{a})^2(t-t_0)^2}. \tag{3.16}$$

Für den Fall gebundener Zustände ($E\leq 0$) sind Kreisbahnen mit dem Radius a möglich. Es ist mit (2.9) und (3.12)

$$\dot{\varphi}=\omega=\frac{l}{ma^2}=\frac{l_\Phi}{2ma^2}\pm\sqrt{(\frac{l_\Phi}{2ma^2})^2+\frac{2E}{ma^2}}. \tag{3.17}$$

Die kleinstmögliche Gesamtenergie ist

$$E_{\min}=-\frac{{l_\Phi}^2}{8ma^2} \tag{3.18}$$

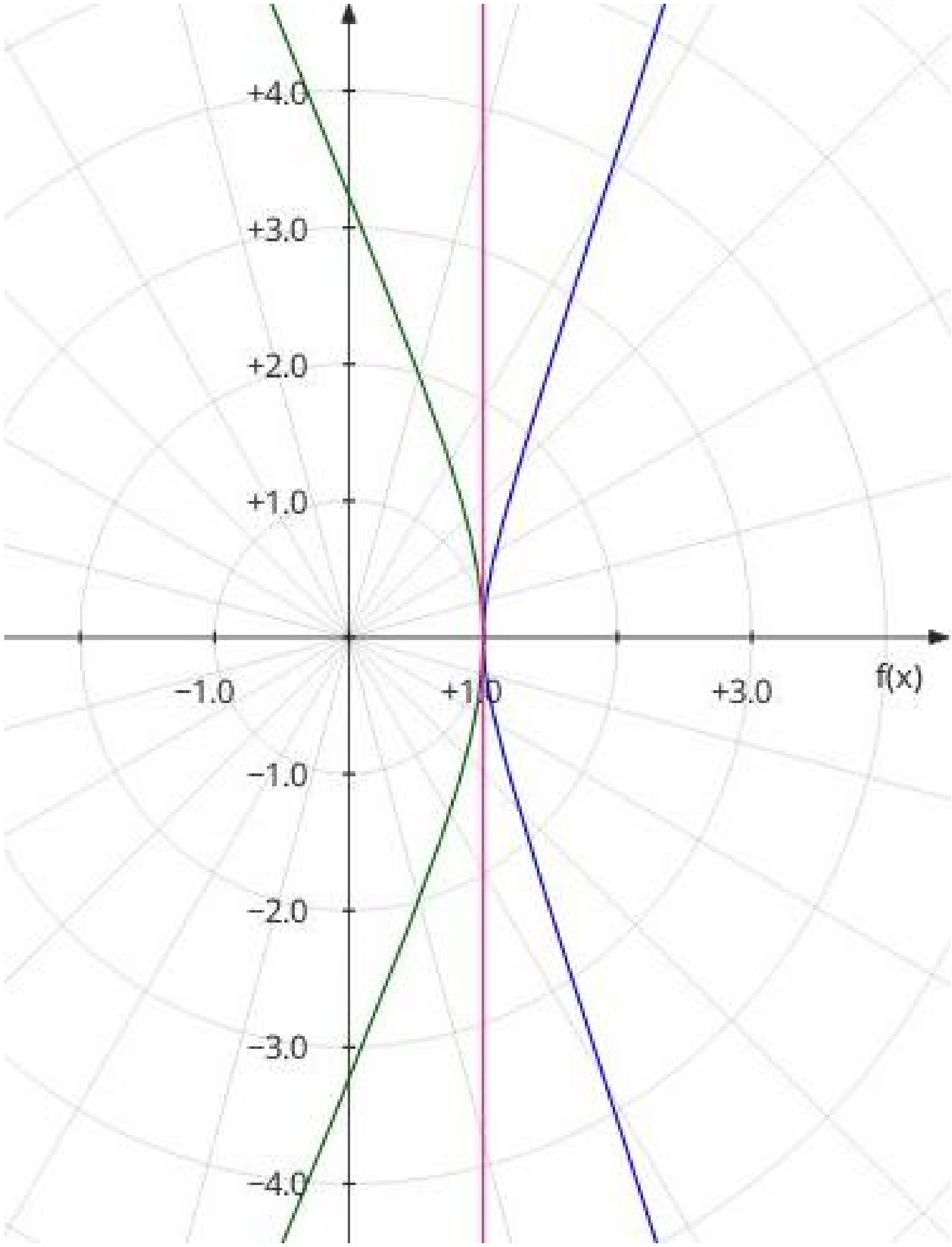

Abbildung 1. Bahnkurven $r(\varphi)$ für $B < 1$, $B = 1$ und $B > 1$.

4. Ausblick auf die Quantenmechanik

Setzt man die Nebenbedingung (2.5) in (2.4) ein und ersetzt die Geschwindigkeit durch

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} \tag{4.1}$$

so ist die Gesamtenergie

$$E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{q}{m}\vec{A}\vec{p} + qV_0. \tag{4.2}$$

Mit einer quadratischen Ergänzung lässt sich diese Formel umformen zu

$$E = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + qV_0 - \frac{q^2}{2m}\vec{A}^{\,2}. \tag{4.3}$$

Für den Übergang zur Quantenmechanik werden Gesamtenergie und Impuls durch Operatoren ersetzt [3]. Dann entsteht die Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen in einem elektromagnetischen Feld:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = [\frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - q\vec{A})^2 + qV_0]\Psi - \frac{q^2}{2m}\vec{A}^{\,2}\Psi. \tag{4.4}$$

Bis auf den Zusatzterm $\frac{q^2}{2m}\vec{A}^{\,2}\Psi$ entspricht diese Gleichung derjenigen, mit der in der Literatur der Aharonov-Bohm-Effekt beschrieben wird. Anders gesagt, der Zusatzterm deutet auf einen Unterschied zwischen Maxwellscher und konservativer Elektrodynamik hin, der sich hier experimentell überprüfen ließe.

5. Literaturhinweise

[1] Schneider, Tilmann: *Über elektromagnetische Längskräfte in stromdurchflossenen Leitern.* Bonn : urn:nbn:de:101:1-2020103115032907204793, 2020, Seite 16.

[2] Greiner, Walter, Rafelski, Johann: *Spezielle Relativitätstheorie.* 2. Auflage Verlag Frankfurt am Main : Harri Deutsch, 1989, Seite 113.

[3] Lehner, Günther: *Elektromagnetische Feldtheorie.* Berlin : Springer, 1990, Seite 517.